101. 連續幾何學の公理について

佐々木 右左 (6.4)

J. v. Neumann の連續幾何學は次の命題(α)及び(α*)((α)の双對的命題を示す。以下同様)をみたす完備可補束である。

(α) Ω が任意の超限順序数なるとき、$\alpha<\beta<\Omega$ に對して

$a_\alpha \le a_\beta$ ならば

$$\left(\bigvee_{\alpha<\Omega} a_\alpha\right)\wedge b = \bigvee_{\alpha<\Omega}(a_\alpha\wedge b).$$

前田先生は談話1047(第236号)で、完備束に於て(α)は下に述べる(γ)と同等である事を示されたが、之について尚少し考察したい。

L を完備束とする。有向集合 D の元 δ を添字とする L の部分集合 $(a_\delta, \delta\in D)$ があつて $\delta_1<\delta_2$ なるとき $a_{\delta_1}\le a_{\delta_2}$ ならば $a=\bigvee_{\delta\in D} a_\delta$ として $a_\delta\uparrow a$ とかき、双對的に $a_\delta\downarrow a$ を定義する。

又 $v_\delta\le a_\delta\le u_\delta$, $v_\delta\uparrow a$, $u_\delta\downarrow a$ なる u_δ, v_δ, a が有る時

$$(o)\text{-}\lim a_\delta = a \quad \text{と書く.}$$

【定理】 完備束 L に於て、次の三命題は同義である。

(α) 上述の命題

(β) $a_\delta\uparrow a$ ならば $a_\delta\wedge b\uparrow a\wedge b$.

(γ) $S\subseteq L$ なるとき、S の任意の有限部分集合 S' に對して

$$\left(\bigvee_{a\in S'} a\right)\wedge b = \bigvee_{a\in S'}(a\wedge b) \text{ ならば}$$

$$\left(\bigvee_{a\in S} a\right)\wedge b = \bigvee_{a\in S}(a\wedge b)$$

(証) (α)→(β)→(γ)→(α) の順序に証明する。

(α)→(β) 帰納法による。

(β) の成立しないやうな有向集合があるとすれば、其の中に最小の濃度を有するもの D がある。

有限有向集合に對しては明らかに(β)は成立つから D は無限集合である。故にその部分有向集合の超限列 $\{D_\alpha\}$ をとつて、次の性質を有するものが存在

する．（岩村氏．談話1173（第262号）参照）

(i) 各の D_α の濃度 $\overline{\overline{D_\alpha}} < \overline{\overline{D}}$

(ii) $\alpha<\beta<\Omega$ のとき．$D_\alpha \subseteqq D_\beta$

(iii) $D=\sum_{\alpha<\Omega} D_\alpha$

その $\alpha<\Omega$ に対して (i)より

(1) $\left(\bigvee_{\delta\in D_\alpha} a_\delta\right)\wedge b = \bigvee_{\delta\in D_\alpha}(a_\delta\wedge b) \qquad (\alpha<\Omega)$

然るに (ii)から $\alpha<\beta<\Omega$ に対して

$$\bigvee_{\delta\in D_\alpha} a_\delta \leqq \bigvee_{\delta\in D_\beta} a_\delta$$

だから (α) を用いて

$$\bigvee_{\alpha<\Omega}\left(\bigvee_{\delta\in D_\alpha} a_\delta\right)\wedge b = \bigvee_{\alpha<\Omega}\left\{\left(\bigvee_{\delta\in D_\alpha} a_\delta\right)\wedge b\right\}$$

従つて (1)及び(iii)により

$$\left(\bigvee_{\delta\in D} a_\delta\right)\wedge b = \bigvee_{\delta\in D}(a_\delta\wedge b)$$

を得る．即ちDに対しても $a_\delta\wedge b \uparrow a\wedge b$ が成立つて不合理．

(β)→(γ) Sの有限部分集合 δの全体Dは包含関係を順序として有向集合を作り

$a=\bigvee_{a\in S} a \quad a_\delta=\bigvee_{a\in\delta} a$ とすれば $a_\delta\uparrow a$ である．

故に(β)により $a_\delta\wedge b\uparrow a\wedge b$.

然るに仮定により $a_\delta\wedge b=\bigvee_{a\in\delta}(a\wedge b)$ であるから (γ) が成立つ

(γ)→(α) $S=\{a_\alpha;\alpha<\Omega\}$ なる集合を考へれば容易に証明出来る（前田先生前出談話参照）

（証明終り）

［注意1］此の定理から連続幾何学を定義する為に．上の三命題の何れを取つて．その双対命題と共に．連続性の公理として採用してもよい事が分かる。

［注意2］(β)' が成立つとき．

$v_\delta\uparrow a$, $v'_\delta\uparrow b$ ならば $v_\delta\wedge v'_\delta\uparrow a\wedge b$ は容易に証明出来(G. Birkhoff Lattice theory p.30参照）又 $u_\delta\downarrow a$, $u'_\delta\downarrow b$ ならば当然 $u_\delta\wedge u'_\delta\downarrow a\wedge b$ であるから

(δ) $(o)\text{-}\lim a_\delta=a$, $(o)\text{-}\lim b_\delta=b$ ならば $(o)\text{-}\lim(a_\delta\wedge b_\delta)=a\wedge b$.

が成立し．逆に(δ)→(β)も云へるから (β)と(δ) とは同義である。

(S) 及び (S*) を満足する束を G. Birkhoff は位相束と呼んでゐる。(同上 p.30. 脚註) 従つて連続幾何学とは完備・可補・位相・模束であると云ひ得る。

最後に懇切なる御指導並びに御援助を賜つた前田先生及び小笠原兄に深甚な感謝の意を表したい。